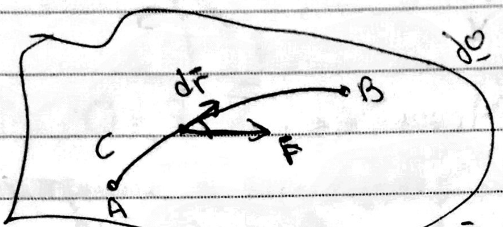
01/04/2019

Μάθημα 9ο

Συντηρητικά ή Διατηρητικά πεδία

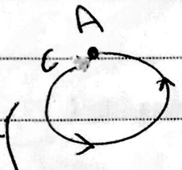
$$W = \oint_C \underbrace{\bar{F}\cdot d\bar{r}}$$

→ στοιχειώδης μετατόπιση πάνω στη καμπύλη



$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, ανοιχτό

$\bar{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$



$$W = \oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \oint_C \bar{F}\cdot\bar{T}\,ds \overset{?}{=} 0$$

Είναι μηδέν το W όταν η $\bar{F}$ είναι συντηρητική

όπου $\exists f$ βαθμωτή και διαφορίσιμη τ.ω. $\bar{F} = \vec{\nabla} f$

Τότε, $\bar{\nabla}\times\bar{F} = \bar{0}$, όπου $\bar{F}$ αστρόβιλη

Σε μια κλειστή διαδρομή μπορώ να ορίσω την κυκλοφορία Γ της $\bar{F}$

$$\Gamma = \oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r}$$

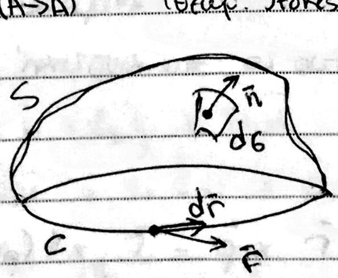
Έχω κυκλοφορία, εάν πεδίο στροβιλό

Αν η $\bar{F}$ είναι συντηρητική $\Rightarrow \Gamma = 0$

Έστω ότι $\bar{F}$ δεν είναι συντηρητική. Τότε $\Gamma \neq 0$ και:

$$\Gamma = \oint_{(A\to A)} \bar{F}\cdot d\bar{r} \overset{\Theta.S.}{=\!=} \iint \underbrace{\text{curl}\bar{F}}_{\bar{\nabla}\times\bar{F}}\cdot\bar{n}\,d\sigma$$

(θεώρ. Stokes)

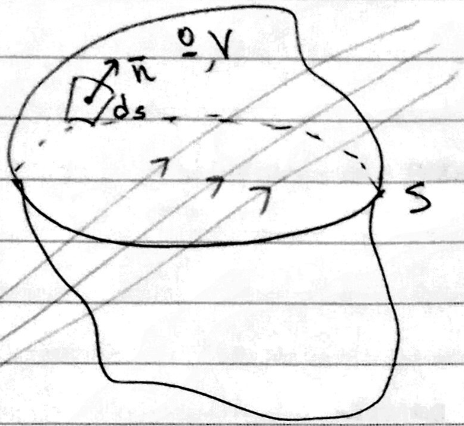


Αν έχω εφαπτομενική συνιστώσα έχω στροβιλισμό

Αστρόβιλο: $\vec{\nabla}\times\bar{F} = \bar{0}$

Αν έχω κάθετη συνιστώσα έχω απόκλιση

Θεώρημα Απόκλισης ή Θ. Gauss



$\bar{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\bar{F}\, dr = \oint\!\!\oint_S \bar{F}\cdot\bar{n}\, ds$$

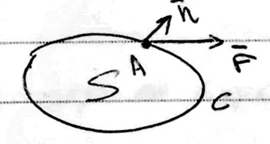
Σωληνοειδές: $\bar{\nabla}\cdot\bar{F} = 0$

Αν ξέρω τι κάνει η $\bar{F}$ στην επιφάνεια μπορώ να βρω τη μεταβολή της στο εσωτερικό

Αν πάρω μια διάσταση έχω το Θεώρημα Green. Δύο μορφές: εφαπτομενική ροή και κάθετη ροή

Κάθετη μορφή του Θεωρήματος Green: $\iint_S \bar{\nabla}\cdot\bar{F}\, d\sigma = \int_C \bar{F}\cdot\bar{n}\, ds$

Το Θεώρημα Απόκλισης ανάγεται σε αυτό όταν πάρω μια διάσταση



Θεωρήματα Διατήρησης

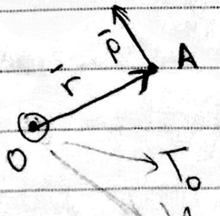
1) Διατήρηση της ορμής, $\bar{p} = m\bar{v}$

όταν το σώμα ισορροπεί: $\bar{F} = \bar{0}$

Από 2ο Ν.Ν.: $\frac{d}{dt}\bar{p} = \bar{F}$ ή $\frac{d}{dt}\bar{p} = \bar{0} \Rightarrow \boxed{\bar{p} = \bar{c}}$, η ορμή διατηρείται σταθερή

Άρα ένα σώμα δεν μπορεί να αλλάξει από μόνο του την κινητική του κατάσταση.
Λέγεται και γραμμική ορμή (η $\bar{p} = \bar{c}$)

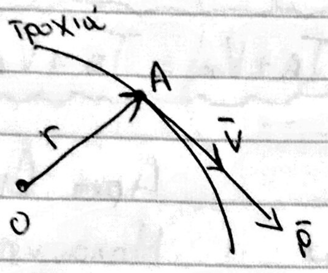
2) Διατήρηση της στροφορμής: $L = \bar{r} \times \bar{p} = \bar{r} \times (m\bar{v})$



Σχεδιάζω το διάνυσμα θέσης (O: σημείο αναφ.)
Και παίρνω το $\bar{p}$ όπως θέλω

Το σώμα και θα περιστραφεί γύρω από αυτόν τον άξονα
Κοιτάζει προς τα έξω, ⊥ κάθετο και στα δύο

Η στροφορμή ή γωνιακή ορμή είναι η ορμή λόγω περιστροφής του σώματος (Υ.Σ.) και συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής του Υ.Σ.



Πότε διατηρείται η στροφορμή; → Παραγωγίζω ως προς t και θέλω =0.

$$\frac{d\bar L}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar r\times\bar p) = \frac{d\bar r}{dt}\times\bar p + \bar r\cdot\frac{d\bar p}{dt} = \underbrace{\bar v\times(m\cdot\bar v)}_{=\bar 0} + \bar r\times\underbrace{\frac{d}{dt}(m\bar v)}_{m\cdot\bar a=\bar F} =$$

$$= \bar r\times\bar F = \bar N \text{ ροπή}$$

Άρα παραμένει σταθερή η στροφορμή όταν : Ροπή $\bar N = \bar 0$

Τότε : $\bar L = \bar c$ σταθερή (διατηρώ μέτρο και κατεύθυνση)

Διατήρηση ⟨ Άθροισμα Ροπών = 0 στην στροφορμή
Άθροισμα Δυνάμεων = 0 στην ορμή

3) Διατήρηση της Ενέργειας :

$$W = \oint_{(A\to B)} \bar F\cdot d\bar r = \oint_A^B \bar F\cdot\bar T\,ds = \oint_A^B \bar F\cdot\bar v\,dt$$

Τα μετατρέπω όλα σε μεταβλητές ως προς t μονοπαραμετρικά

Είναι: $$W = \oint_A^B m\cdot\frac{d\bar v}{dt}\cdot\bar v\,dt = \oint_A^B m\cdot\bar v\cdot\frac{d\bar v}{dt}\,dt = \oint_A^B m\cdot\bar v\cdot d\bar v$$

Αν $\bar v = v_1\bar i + v_2\bar j + v_3\bar k$, $d\bar v = dv_1\bar i + dv_2\bar j + dv_3\bar k$

Τότε: $\bar v\cdot d\bar v = v_1 dv_1 + v_2 dv_2 + v_3 dv_3 = \frac{1}{2} d(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = \frac{1}{2} d|\bar v|^2$

Άρα: $$W = \oint_A^B \frac{1}{2} m\, d|\bar v|^2 = \frac{1}{2} m|\bar v|^2_B - \frac{1}{2} m|\bar v|^2_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \oint_A^B \bar F\cdot\bar v\,dt = \frac{1}{2} m|\bar v|^2_B - \frac{1}{2} m|\bar v|^2_A = T_B - T_A$$

όπου $T = \frac{1}{2} m|\bar v|^2$ κινητική ενέργεια

Έστω τώρα ότι η $\bar{F}$ είναι συντηρητική, δηλ $\bar{F} = \bar{\nabla} f$, τότε, από ορισμό: $W = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{r} = f(B) - f(A) = T_B - T_A \Rightarrow$

$\Rightarrow T_A - f(A) = T_B - f(B) \overset{\text{ορίζω}}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow$ Συνάρτηση Δυναμικού $V = -f$ $\Bigg\} \Rightarrow \boxed{T_A + V_A = T_B + V_B}$

Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας (ΑΔΜΕ)

Αρχή της δυναμικής: Η ενέργεια διατηρείται
Παράδειγμα δυναμικού πεδίου $\rightarrow$ Το βαρυτικό

ΑΔΜΕ: Μας λέει ότι η ολική ενέργεια διατηρείται σταθερή όταν η δύναμη $\bar{F}$ είναι συντηρητική

Οι δυνάμεις Τριβής δεν είναι συντηρητικές
Οι βαρυτικές και οι ηλεκτρομαγνητικές είναι συντηρητικές

Εξισώσεις Euler (πληροφοριακά)

$$\underset{\substack{m\bar{a} \\ \text{πυκνότητα}}}{\text{''}\rho \cdot \frac{D\bar{q}}{Dt}} = -\bar{\nabla} p + \rho \bar{f}$$

(συντηρητική) Δεν υπάρχουν τριβές

βαθμωτή p — μεταβολή της ορμής

$\bar{q} = (u, v, w)$, ρευστό, $\bar{f}$: βαρυτικής

Άρα, όταν $\bar{\nabla} \times \bar{F} = \bar{0}$ τότε $E_{ολ} =$ σταθερή

Παράδειγμα

Ομογενές πεδίο βαρύτητας, $\bar{F} = -mg\bar{k}$ (z-άξονας, προς τα πάνω)
$g \simeq 10 m/s^2$, m: kg τότε F: $Nt = kg \cdot m/s^2$ μονάδα δύναμης
Θα δείξω ότι είναι συντηρητικό:
Υπολογίζω: $\bar{F} = -\bar{\nabla} V$

$$\bar{\nabla} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} = \left(\overbrace{\frac{\partial}{\partial y}(-mg)}^{0} - 0\right) i - \left(\overbrace{\frac{\partial}{\partial x}(-mg)}^{0} - 0\right) j + 0 \cdot \bar{k} = \bar{0}$$

Άρα: $\bar{F}$: αστρόβιλο $\Rightarrow$ συντηρητικό

$$\bar{F} = -\bar{\nabla}\bar{V} = \begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ 0 = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ -mg = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow V = V(z)$$

συνάρτηση ως προς z

$$-mg = -\frac{\partial V}{\partial z} \Rightarrow \frac{dV}{dz} = mg \Rightarrow \int \frac{dV}{dz}\,dz = \int mg\,dz \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow V(z) = mgz + c \\ \text{για } z = z_0,\ V(z_0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = mgz_0 + c \Rightarrow z_0 = -mgz_0$$

Τελικά: $V(z) = mg(z - z_0)$, βαθμωτή και διαφορίσιμη

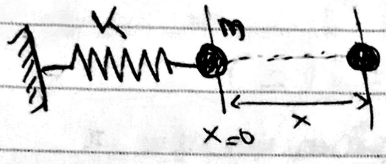
Γραμμική κίνηση (σε παράδειγμα)

Έστω $\bar{F} = f(x)\bar{i}$, τότε $\bar{\nabla} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f(x) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \bar{0}$

Άρα: $\bar{F} = -\bar{\nabla} V \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{V}}{\partial x} = -f(x) \Rightarrow \dfrac{dV}{dx} = -f(x) \Rightarrow \\ -\dfrac{\partial \bar{V}}{\partial y} = 0 \\ -\dfrac{\partial \bar{V}}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow V = V(x)$

$$\Rightarrow \boxed{V(x) = -\int f(x)\,dx + c}$$ συνάρτηση δυναμικού

Νόμος του Hooke



Απλός αρμονικός ταλαντωτής

Είναι γραμμική η κίνηση, άρα $\boxed{F_x = -kx}$
γιατί κινούμαι πάνω στον άξονα x μόνο

έχω «-» γιατί θέλω να επιστρέψω πίσω στην αρχική μου θέση.

$$-\frac{dV}{dx} = F_x = -kx \Rightarrow V(x) = +\int kx\,dx = +\frac{kx^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow \boxed{V(x) = \frac{kx^2}{2} + c}$$

Με αρχική συνθήκη: $x=0,\ V(x)=0 \Rightarrow c=0$.

2ος Ν.Ν.: $m\bar{a} = \bar{F} \Rightarrow m\ddot{x} = -kx \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

ΔΕ, 2ης τάξης, γραμμική, ομογενής
κάνει ταλάντωση
Άρα με χαρακτηριστικό πολυώνυμο
βρίσκω τις λύσεις:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0 \Rightarrow x(t) = c_1 e^{iat} + c_2 e^{-iat} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = A\cos(at) + B\sin(at)$$

όπου $a = \sqrt{\frac{k}{m}}$ γωνιακή ταχύτητα